Roter Faden
Mathematik Mittelstufe

Heiko Schröder

4. März 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Logarithmen

Logarithmen sind nichts weiter als die *Exponenten* zu einer *Basis*. Die Gleichung $2^x = 4$ besitzt als Lösung $x = \log_2 4$. Allgemein lassen sich besonders einfach die Logarithmen zur Basis 10 mit dem Taschenrechner ziehen (Abkürzung lg). Diese dekadischen, oder BRIGGschen Logarithmen lassen einen Rückschluss auf die Zehnerpotenz einer Zahl zu. Es ist z.B. $\lg 2438$ eine Zahl, die zwischen 3 und 4 liegen muss, denn $10^3 = 1000$ und $10^4 = 10\,000$.

Genauso wie bei Wurzeln hat die Zahl unter dem $\lg - Zeichen$ einen Namen und heisst *Argument*.

1.1 Logarithmus und Reize

Der Mensch nimmt optische und akustische Reize logarithmisch wahr. Was bedeutet dies?

Denken wir uns die Frequenz eines Tones vom Betrag $f_1 = 1\,kHz$. Ein Ton, der eine Frequenz von $f_2 = 2\,kHz$ besitzt, nehmen wir als einen *verwandten* Ton wahr. Es ist in der Tat ein *Oktavton*.

Wenn wir dagegen die Töne $f_1 = 5\,kHz$ und $f_2 = 6\,kHz$ miteinander vergleichen, so kommen uns diese Töne *nicht* verwandt vor! Tatsächlich ist die höhere Frequenz auch nicht das Doppelte der tieferen. Wir haben es also *nicht* mit einer Oktave zu tun, obwohl die *Differenz* der Frequenzen in beiden Beispielen dieselbe ist! Das Ohr hört demnach keine Frequenzdifferenzen, sondern Frequenz*verhältnisse*. Beim längeren Überlegen stellt sich dieser Sachverhalt als selbstverständlich heraus, denn auch die Töne $f_1 = 0\,kHz$ und $f_2 = 1\,kHz$ liegen ja um die Differenz $1000\,Hz$ auseinander; allerdings ist f_1 ja gar kein Ton mehr!

Was hat dies nun mit dem Logarithmus zu tun? Nun, die Frequenzen *aller* Töne, die sich aus dem Grundton mit der Frequenz f_1 als *verwandt* heraushören lassen, sind durch die Beziehung

$$f_m = f_1 2^m \tag{1}$$

gegeben. Die Zahl n ergibt dabei den $n - ten$ Tonschritt an.

Ganz ähnlich sieht es mit der *Lautstärke* eines Tones aus: auch hier lässt sich leicht ermitteln, ob ein Ton doppelt so laut wie ein anderer ist, aber die Energie*differenz* der Lautstärken ist nicht wahrnehmbar. Auf dieser Feststellung basiert auch die Wahrnehmung von Erschütterungen durch Erdebeben. Die Sakla ist nun so beschaffen, dass von einer Grundenergie E_0 ausgegegangen wird und diese mit einer gemessenen Energie E verglichen wird. Nun ist die Frage, um wie viele *Zehnerpotenzen* die gemessene Erschütterung grösser als die Grundenergie E_0 war.

Es gilt also die Gleichung

$$E_m = E_0 10^m \tag{2}$$

Weiss man nun zum Beispiel, dass die Energie 40 mal so gross wie die Ausgangsenergie E_0 ist, so gilt es die Gleichung $10^m = 40$ zu lösen, was natürlich auf

$$m = \lg 40 = 1,6 \tag{3}$$

führt. Das Erdbeben hat also die Stärke $1,6$ auf der RICHTERskala[1].

»Erschütterungen« des Auges (durch Licht) erfolgt nach demselben Prinzip.

1.2 Natürliche Logarithmen

Eine sehr viel wichtigere Basis an Stelle der 10 ist jedoch die Eulersche Zahl e. Diese ergibt sich aus einem natürlichen Wachstumsprozess:

1. Nehmen wir einmal an, dass zu dem Beginn der zeitlichen Betrachtung die Anzahl einer Population von Individuen $n_0 = 1000$ beträgt. Wenn nun der Sachverhalt so beschaffen ist, dass nach einem Jahr genau dieselbe Zahl an Individuen dazugekommen ist, so haben wir am Jahresende $n_0 + n_0 = 2000$ Individuen.
2. Wenn es aber nun so wäre, dass jeweils halbjährlich die Zahl um 50 % wächst, so ist die Zahl nach einem Halbjahr auf $n = n_0 + \frac{1}{2}n_0 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) n_0$ angewachsen. Die Gesamtzahl wuchs also im ersten Halbjahr um den Faktor $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$. Im zweiten Halbjahr müssen wir nun von der Ausgangszahl $\left(1 + \frac{1}{2}\right) n_0$ ausgehen, die erneut um den Faktor $\left(1 + \frac{1}{2}\right)$ anwächst. Das Ergebnis ist am Ende des Jahres demzufolge $n = n_0 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$.
3. Bei einem vierteljährlichen Anwachsen um 25 % erhalten wir natürlich $n = n_0 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^4$.
4. Wächst die Population in $n - Schritten$ um $\frac{100}{n}$ % an, so erhalten wir am Jahresende $n = n_0 \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

Das Besondere an der ganzen Sache ist nun die Tatsache, dass bei wachsendem n der Ausdruck $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ einem *endlichen* Wert zustrebt, der als EULERsche Zahl e bekannt ist. Diese Eulersche Zahl liegt in der Nähe von $2,72$; sie ist wahrscheinlich eine *irrationale* Zahl.

Wenn also die Population nicht mehr in einzelnen Schritten, sondern in *jedem Augenblick* anwächst, so ergibt sich maximal der $e - fache$ Wert am Ende eines Jahres. Nach einem Jahr ist die Population also auf

$$n = n_0 e \tag{4}$$

[1] Weshalb der Exponent übrigens m heisst, hat auch etwas mit »Grösse« zu tun. Das lateinische Wort »magnitudo« heisst »Grösse«.

angewachsen. Nach einer beliebigen Anzahl von t Jahren ist dies natürlich der Wert

$$n = n_0 e^t \tag{5}$$

Der Wert t darf dabei nur eine *Anzahl (ohne Einheit!)* angeben. Da es sich dabei um *natürliches* Wachstum handelt, haben die Logarithmen zur Basis e eine besondere Bedeutung und heissen *natürliche* Logarithmen. Die Lösung der Gleichung $e^x = 2$ ist demnach $x = \ln 2$.

1.3 Wachstumsprozesse

Jetzt wissen, wir, dass Kurven der Form e^x ein Wachstum beschreiben. Das tun allerdings auch Kurven der Form 2^x, nur nimmt nach jedem Schritt der Ausgangswert um 2 und nicht um e zu. Allerdings lassen sich die Kurven der Form 2^x auch als $e - Funktion$ schreiben, und zwar wie folgt:

Es ist $\ln 2$ *derjenige Exponent*, der für die $e - Funktion$ notwendig ist, um den Wert 2 zu ergeben. Daher können wir auch die 2 durch den Ausdruck $e^{\ln 2}$ ersetzen. Statt 2^x können wir ebensogut $\left(e^{\ln 2}\right)^x$ schreiben, was wiederum dasselbe wie $e^{\ln 2x}$ist[2]. Damit haben wir: jede Wachstumsfunktion a^x lässt sich durch eine *Exponentialfunktion* $e^{\lambda x}$ ausdrücken, wobei der Faktor λ der sogenannte »Wachstumsfaktor« ist. Wenn wir wissen wollen, um welchen Wert a sich nach jeder Zeiteinheit der Ausgangswert ändert, so ergibt dieser Wert aus der Beziehung $\lambda = \ln a$ woraus folgt, dass $a = e^\lambda$ ist.

Ein paar Beispiele:

1. Um welchen Wert ändert sich die Funktion $n = 1000e^{1,2t}$ nach jeder Zeiteinheit $t = 1\,s$[3]? Natürlich um den Wert $a = e^{1,2} \approx 3,32$.

2. Um welchen Wert ändert sich die Funktion $n = 1000e^{-4t}$ nach jeder Zeiteinheit $t = 1\,s$? Um den Wert $a = e^{-4} = \frac{1}{e^4} \approx 0,018$. Wachstumsprozesse mit *negativem* Wachstumsfaktor sind also »Verfallsprozesse«. Ihr Gesamtwert sinkt.

1.4 Exponentialkurven

Wie sieht nun eine Kurve der Form $y = e^{\lambda x}$ aus? In der Abbildung siehst Du die Kurven für die Werte $\lambda = 1$, $\lambda = 2$, $\lambda = 0\, und\, \lambda = -1$. Der Ausgangswert ist offenbar bei jeder Funktion die 1.

Je grösser der Wert für λ, desto explosionsartiger das Wachstum. Ein Wert für $\lambda = 0$ bedeutet: überhaupt kein Wachstum. Sehr wichtig ist übrigens die

[2] $\ln 2x$ ist dasselbe wie $\ln 2 \cdot x$ und nicht etwa wie $\ln(2x)$!!

[3] Wenn wir vereinbaren, dass der Wert λ die Einheit $\frac{1}{s}$ besitzt, so dürfen wir fortan t in Sekunden einsetzen.

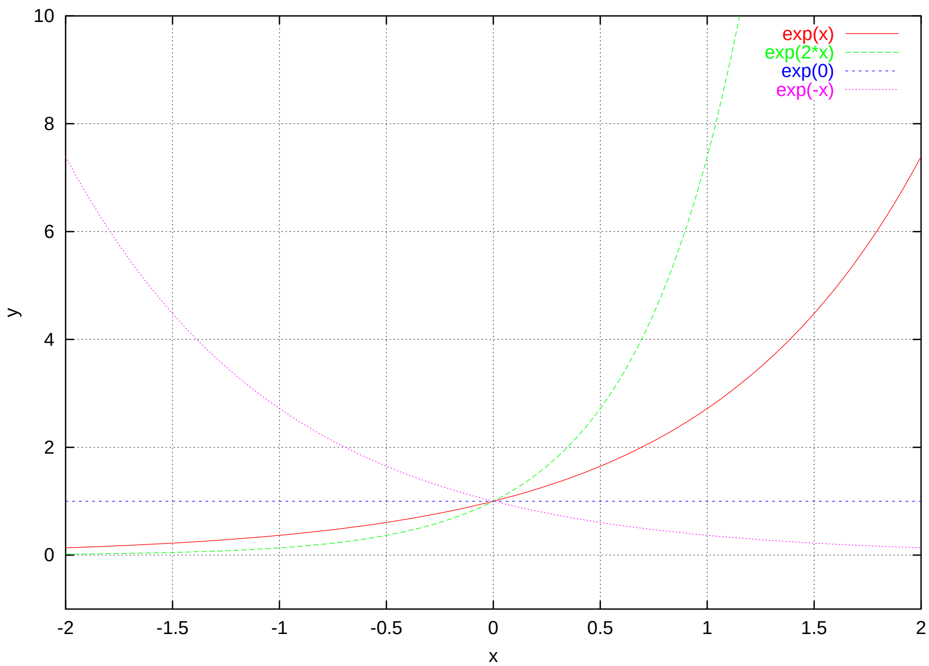

Abbildung 1: Exponentialfunktionen mit unterschiedlichem Wachstumsfaktor

Feststellung, dass die Logarithmusfunktion *eineindeutig* ist, d.h es existiert nicht nur für jeden $x - Wert$ genau ein $y - Wert$, sondern die Eindeutigkeit gilt auch umgekehrt! Ausserdem stellen wir fest, dass $e^{\lambda x}$ *niemals* Null oder gar negativ werden kann. Damit kann auch $\log c$ nicht gebildet werden, wenn $c \leq 0$ ist! Andererseits ist $\log 1$ immer 0, unabhängig von der zu Grunde liegenden Basis.

1.5 Logarithmensätze

Ausser zur Exponentbestimmung, kann mit dem Logarithmus auch richtig gerechnet werden. Historisch war der Logarithmus ohnehin zur Rechenerleichterung gefunden worden. Es stellt sich heraus, dass

1. Der Logarithmus eines *Produktes* die *Summe* der einzelnen Logarithmen ist. Beweis: bekanntlich ist $a^x a^y = a^{x+y}$. Folglich: wenn a^x eine Zahl c bedeutet und a^yeine andere Zahl d, so sind $x = \log_a c$ und $y = \log_a d$ die dafür notwendigen Exponenten. Da nun a^{x+y} sicherlich dasselbe wie cd ist, so ergibt sich, dass der Exponent $x + y = \log_a(cd)$ ist. Und das ist genau, was wir eingangs sagten: $\log_a(cd) = \log_a c + \log_a b$. Mit einem Logarithmus »zieht man also ein Produkt auseinander«.

2. Der Logarithmus eines *Quotienten* ist die *Differenz* der einzelnen Logarithmen. Der Beweis folgt aus Satz 1. Da $\frac{a^x}{a^y} = a^x a^{-y}$ ist, folgt die Aussage durch eine ganz analoge Überlegung. Daraus folgt übrigens eine wichtige Aussage für logarithmische Skalen, wie wir ihnen bei der Betrachtung von Reizen im Abschnitt 1.1 begegnet sind. Bei einer logarithmischen Skala ergeben zwei benachbarte Werte a und b immer dasselbe Verhältnis $\frac{a}{b} = v$. Durch Logarithmieren $\ln \frac{a}{b} = \ln v$[4] ergibt sich $\ln a - \ln b = \ln v$. Da $\ln v$ ebenfalls eine Konstante ist (weil v konstant ist!), haben wir: bei logarithmischen Skalen sind nicht die Differenzen zweier benachbarter Werte a und b, sondern die *Differenz ihrer Logarithmen* konstant.

3. Der Logarithmus einer *Potenz* ist das *Produkt* des Logarithmusses von der Basis mit dem Exponenten. Hier ist der Beweis wahrscheinlich verständlicher als die Aussage selbst. Da $c^n = \underbrace{c \cdot \ldots \cdot c}_{n-mal}$ ist, können wir wieder den ersten Logarithmensatz anwenden und erhalten $\log_a c^n = n \log_a c$. Mit einem Logarithmus lassen sich also Gleichungen *zerlegen*.

Zwei Beispiele:

1. Zu lösen ist die Gleichung $4^x = 7^{x-2}$. Durch Anwendung des ersten und dritten Logarithmensatzes zerlegen wir die Gleichung regelrecht in die Form
$$x \ln 4 = x \ln 7 - 2 \ln 7 \tag{6}$$

[4]Wir verwenden für die Anwendung in Zukunft immer den *natürlichen* Logarithmus.

Bringen wir alle $x-haltigen$ Terme auf die linke Seite, so erhalten wir:

$$x(\ln 4 - \ln 7) = -2\ln 7$$

was wir nach dem zweiten Logarithmensatz in die Form

$$x \ln \frac{4}{7} = -2\ln 7$$

überführen können. Die Lösung lautet:

$$x = -\frac{2\ln 7}{\ln \frac{4}{7}}$$

was sich *nicht* weiter vereinfachen lässt.

2. Stehen auf beiden Seiten dieselben Potenzen, also beispielsweise $4^{2x} = 8^{x-2}$, was ja nichts anderes als $2^{4x} = 2^{3x-6}$ bedeutet (Potenzsatz für 4 und 8 ausnutzen), so ergibt ein direkter Exponentenvergleich $4x = 3x - 6$ oder $x = -6$.

Übrigens ist das Logarithmieren eine Äquivalenzumformung. Eine Probe ist also unnötig und gehört nicht zu Lösungsweg!

1.6 Logarithmische Gerade

Der dritte Logarithmensatz ist eine äusserst leistungsfähige Angelegenheit: er biegt krumme Kurven gerade. Haben wir eine Funktion

$$y = ab^x$$

gegeben, so ergibt sich durch Logarithmieren die Form

$$\ln y = \ln bx + \ln a$$

Wenn jetzt die Funktion im Achsenkreuz so aufgetragen wird, dass auf der Ordinate statt y die Werte für $\ln y$ aufgetragen werden, so ergibt sich eine Gerade mit der Steigung $\ln b$ und dem Achsenabschnitt $\ln a$. Da $\ln y$ über x aufgetragen wird (x wird also *nicht* logarithmiert!), heisst diese Auftragung halblogarithmisch. Stelle Dir einmal eine Wertetabelle für die Funktion $y = 2 \cdot 3^x$ zusammen und prüfe dies nach.

Damit nicht genug. Der dritte Logarithmensatz biegt auch Parabeln der Form

$$y = ax^b$$

gerade. Nehmen wir uns hier gleich ein Beispiel her, z.B. $y = x^2$. Durch Logarithmieren erhalten wir

$$\ln y = 2\ln x$$

Jetzt müssen wir also auch die $x-Werte$ logarithmieren, weshalb dieses Verfahren *doppeltlogarithmisch* heisst. Dieses Beispiel führt auf eine Gerade mit der Steigung 2 und dem Achsenabschnitt 0. In welchen Fällen ist der Achsenabschnitt von 0 verschieden? Natürlich dann, wenn die Potenz noch einen Vorfaktor hat, und zwar z.B. $y = 4x^3$. Jetzt ergibt das Logarithmieren die halblogarithmische Gerade

$$\ln y = 3 \ln x + \ln 3.$$

Wann benötigt man dies? Nehmen wir an, dass die Gültigkeit eines Naturgesetzes überprüft werden soll, und zwar das Fallgesetz. Es wird vermutet, dass der zurückgelegte Weg s proportional zum Quadrat der Fallzeit t ist, also $s \sim t^2$, das heisst »fällt der Stein doppelt so lang, so vervierfacht sich der Fallweg«. Das ist zwar keine Gleichung, aber wir wissen ja, dass bei einer Proportionalität der Quotient $\frac{s}{t^2}$ eine Konstante ergeben muss, die man in der Regel natürlich nicht kennt. Also es geht um *zwei* Fragen:

1. Ist die Proportionalität $s \sim t^2$ *überhaupt* gegeben und wenn ja,

2. wie lautet die Konstante $k = \frac{s}{t^2}$, welche die Proportionalitätsaussage in die Gleichung $s = kt^2$ überführt?

Das Rezept geht wie folgt: Man nehme eine Wertetabelle von wenigstens *fünf* $s-t$ Wertepaaren auf und trage $\ln s$ über $\ln t$ auf. Ergibt sich dabei eine Gerade, so ist wenigstens schon einmal klar, dass der Fallweg proportional zu einer Potenz von t sein muss. Die Konstante ergibt sich sofort aus dem Achsenabschnitt, denn der ist offenbar gleich $\ln k$. Also ist $k = e^{Achsenabschnitt}$. Jetzt muss die Gerade nur noch die richtige Steigung besitzen, also genau 2. Wenn dies auch noch der Fall ist, haben wir beide Fragen auf einen Schlag erledigt[5].

1.7 Der Logarithmus als Heilmittel für alles?

Leider nein. Es gibt Aufgaben, die sich mit dem Logarithmus nicht lösen lassen und auch sonst nicht. Dazu gehören

1. Alle Gleichungen, die eine Summe von nicht vereinbaren Exponentialtermen enthalten, also etwa $4^x = 3^x + 7^{x-2}$. Eine *Summe* kann der Logarithmus *nicht* weiter zerlegen!. Bedenke bitte, dass $4^x = 3^x \cdot 7^{x-2}$ sehr wohl zerlegbar und damit lösbar ist.

[5] Tatsächlich ist das übrigens der Fall! Die Konstante ergibt genau die Hälfte von $9,81$ (kennst Du den Wert?) und die quadratische Abhängigkeit stimmt wirklich. Dieser Versuch wird üblicherweise in der 11. Klasse durchgeführt.

2. Alle Gleichungen, welche die Variable x nicht nur als Exponenten, sondern auch zusätzlich noch »auf dem Boden« enthalten, wie $4^x = x \cdot 7^x$. Bedenke, dass auch diese Gleichung nicht löbar ist, *obwohl* sie keine Summe darstellt! Logarithmieren führt auf $x \ln 4 = \ln x + x \ln 7$. Also: x kommt zweimal alleine und einmal unter dem ln vor. Damit ist der Ofen aus! Keine Chance!

Die beiden nicht lösbaren Gleichungstypen gehören zu den sogenannten *transzendenten Gleichungen.* Sie können nur numerisch gelöst werden. Im allgemeinen ist so etwas immer bei einer Summe von Exponentialtermen notwendig. Mit einem ungeheuren Spezialfall beenden wir dieses Kapitel:

$4^x = 4^{2x} - 2$ kann sehr wohl gelöst werden, *obwohl* es sich dabei um eine Summe handelt, denn die Aufgabe ist mit $(4^x)^2 - 4^x - 2 = 0$ identisch was auf eine quadratische Gleichung in 4^x führt, denn es ist $4^{x_{1/2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$ lösbar und es gilt: $4^x = 2 \vee 4^x = -1$. Da die zweite Bedingung keine Lösung besitzt, haben wir nur die erste zu betrachten und die führt auf $x \ln 4 = \ln 2$ oder $x \cdot 2 \ln 2 = \ln 2$, was sofort auf $x = \frac{1}{2}$ führt.

1.8 Übungsaufgaben

1. Zeichne den Graphen der Funktion $y = \ln x$.
2. Bestimme die Lösungmenge der Gleichung $2^x = 7$.
3. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $3^x = 9^{x-1}$.
4. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $7^{x-4} = 2^{x+3}$
5. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\ln \sqrt{x} = 7$.
6. Bestimme die Lösungsmenge der Gleichung $\ln x + \ln(x+1) = 4$. Hinweis: die Aufgabe führt auf eine quadratische Gleichung·
7. Zeige, dass $3^{\log_3 a} = a$ gilt, wobei a ein beliebiger Parameter $a > 0$ ist. Zeige diesen Sachverhalt möglichst für eine *beliebige* Basis b.
8. Zeige mit Hilfe der eben gelösten Aufgabe, dass $e^{\lambda x} = b^x$ sofort auf $\lambda = \ln b$ führt.
9. Drücke mit Hilfe des Ergebnisses aus der eben gelösten Aufgabe die Potenzen 2^x und 3^x durch eine $e - Funktion$ aus.
10. Warum kann es keine Logarithmen zu den Basen 1 oder 0 geben?
11. Eine Algenpopulation vergrössert ihre Fläche pro Tag um das Dreifache. Die Ausgangsfläche beträgt $2\,m^2$.
    (a) Ermittle die zugehörige Exponentialfunktion $n = n_0 e^{\lambda t}$, wobei t die Zeit in Tagen bedeutet, indem Du die Parameter λ und n_0 ermittelst.

(b) Ermittle die Zeit, in der sich die Fläche verdoppelt hat.

(c) Wie gross ist die Fläche, wenn genau die Zeit $t = \frac{1}{\lambda}$ vergangen ist?

(d) Zeichne die halblogarithmische Gerade der Exponentialfunktion.

(e) Formuliere eine entsprechende Aufgabe für die Zinseszinsrechnung.

12. Begründe, warum die Funktion $y = 3x^4$ bei *doppeltlogarithmischer* Auftragung eine Gerade gibt. Ermittle deren Steigung und deren Achsenabschnitt.

13. Von einer Funktion ist die Wertetabelle $\begin{array}{c|cccc} x & 4 & 2 & 0 & -1 \\ \hline y & 16 & 2 & 0 & -\frac{1}{4} \end{array}$ bekannt. Ermittle durch halb-, oder doppeltlogarithmische Auftragung, ob es sich um eine Exponentialfunktion oder eine Parabel handelt.

14. Zeichne eine Skala, wobei die einzelnen Abstände benachbarter Marken $1\,cm$ betragen sollen. Schreibe an die erste Marke eine beliebige, positive und von 0 und 1 verschiedene Zahl. Schreibe an die folgenden Marken jeweils das Zehnfache der vorhergehenden Marke. So entsteht eine logarithmische Skala. Zeige, dass die *Differenz* der Logarithmen zweier benachbarter Marken stets konstant ist.

15. Helligkeitsskala nach POGSON. Seit der Antike werden Sternhelligkeiten nach *Grössenklassen* eingeteilt und zwar entsprach einem Stern erster Grösse die Helligkeit 1 und einem noch gerade sichtbaren Stern die Helligkeit 6. Man weiss nun, dass ein Stern der Helligkeit 1 hundertmal heller als ein Stern der Helligkeit 6 ist.

    (a) Um welchen Faktor unterscheidet sich die Helligkeit der Sterne zweier benachbarter Grössenklassen?

    (b) Um wie viele Male schwächer ist ein Stern der Grösse 3 als die Wega, die der hellste Stern in der Leier ist und die Grössenklasse 0 besitzt?

    (c) Welche Grössenklasse hätte ein Objekt, das zehnmal heller als die Grössenklasse 1 ist?

16. Um auf einer Geigensaite eine Oktave abzugreifen, muss die Saite auf das Verhältnis $\frac{1}{2}$ verkürzt werden. Der Oktavton hat dann die doppelte Frequenz wie der ursprüngliche Ton der leeren Saite. Das ist übrigens immer so. Wird eine Saite auf das Verhältnis $\frac{m}{n}$ verkürzt, so steigt die Frequenz genau im umgekehrten Verhältnis.

    (a) Die Tonleiter des Klaviers entsteht durch 12 gleichartige Verkürzungen einer Saite (Halbtöne eingeschlossen) um ein bestimmtes Verhältnis v, das bestimmt werden soll. Hinweis: ein eine Oktave passen 12 Töne. Wie gross ist das gesuchte Verhältnis v?

(b) Der fünfte Ton der Tonleiter (also der *siebte* Halbton vom Grundton aus gerechnet) wird nach der Naturtonreihe durch das Verhältnis $v = \frac{2}{3}$ gebildet (sogenannte reine Quinte). Wenn die leere Saite also auf dem Ton c schwingt, so schwingt die um das Verhältnis $v = \frac{2}{3}$ verkürzte Saite auf dem Ton g. Überprüfe, ob die reine Quinte mit der Quinte auf dem Klavier genau übereinstimmt.

(c) Welchen Fehler im Tonschritt erhält man, wenn von dieser Quinte wieder die Quinte gebildet wird?

2 Kreis und Kugel

Bei einem Kreis und einer Kugel brauchen wir nicht viel Federlesens zu machen. Die Grösse sowohl eines Kreises als auch einer Kugel ist durch den Radius gegeben. Da es überhaupt keine weiteren Abhängigkeiten geben kann, steht von vornherein fest, dass der Umfang eines Kreises zum Radius proportional sein muss, denn

1. Ein Kreis vom Radius 0 hat natürlich auch keinen Umfang und

2. Wenn für $r = 0$ der Umfang verschwindet, so kann nur noch eine Abhängigkeit der Form $U \sim r^n$ möglich sein. Da der Umfang aber eindimensional ist, r^n dagegen $n - dimensional$, muss die Dimensionszahl 1 sein. Was sonst.

Also hinter der Proportionalität von Umfang und Radius steckt nichts Besonderes. Aber die Proportionalitätskonstante ist sehr wohl hochinteressant. Sie heisst 2π, wobei π die Kreiszahl ist[6]. Die Herleitung von π ist mathematisch interessant, hat aber keinen praktischen Wert, weshalb wir sie hier weglassen, auf den Unterricht oder ein gutes Lehrbuch verweisen. Das Interessanteste an π können wir dagegen in der Schule nicht nachweisen: π ist genauso wie die EULERsche Zahl transzendent[7] irrational, das heisst sie ist weder als Bruch (daher *irrational*) noch als Wurzel (daher *transzendent* und *nicht algebraisch*) schreibbar. Der einzige Ausweg: die Zahl muss als Buchstabe geschrieben werden.

2.1 Das Formelquartett

Wie wir bereits sahen, gilt für den Umfang des Kreises $U = 2\pi r$.

Bei der Fläche ist der Sachverhalt noch einfacher: $A = \pi r^2$ (die Abhängigkeit von r^2 ist wieder alles andere als ein Wunder!).

[6]...und wohl deshalb durch das griechische »p« ausgedrückt wird, weil damit das Wort »P«roportionalität ausgedrückt werden soll.

[7]Im Gegensatz zu e ist der Sachverhalt bei π eindeutig bewiesen.

Bei der Kugel sind wir nicht überrascht, dass das Volumen proportional zu r^3 ist. Die genauere Rechnung ergibt: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$.

Doch nun kommt eine Überraschung. Die Oberfläche der Kugel ist $A = 4\pi r^2$. Die Abhängigkeit von r^2 ist natürlich wieder keine Überraschung, aber die 4 ist es sehr wohl. Eine Kugel hat also eine genau viermal so grosse Oberfläche wie ihr Äquatorquerschnitt. Das ist schon sehr erstaunlich.

2.2 Kreis und Kugel in der Natur

Der Kreis gilt von jeher als *idele* Kurve. Und wie keine andere zeigt er auch, dass das Ideal die verkörperte Langeweile ist. Bei der Kugel sieht es damit keineswegs besser aus, aber sie hat sehr wohl in der Natur eine sehr grosse Bedeutung: sie ist derjenige Körper, der bei gegebenem Volumen die *kleinste* Oberfläche hat. Das ist, wie Du Dir sicherlich denken kannst, alles andere als einfach zu zeigen. *Aber*: warum ziehen sich Tropfen im schwerelosen Raum zu einer Kugel zusammen? Weil die Kohäsionskräfte der Moleküle an der Flüssikeitsoberfläche diese nach innen ziehen. Und zwar von allen Seiten gleichzeitig.

In einem kleinen Wassertropfen ist der Druck sehr viel grösser als in einem grossen. Das kannst Du an einem regnerischen Sommertag leicht feststellen: suche Dir ein Blatt aus, auf dem sich zwei verschieden grosse Wassertropfen befinden und verbinde sie, indem Du mit einem Streichholz eine »Wasserstrasse« von einem Tropfen zum anderen ziehst. Du wirst sehen, dass der kleinere Tropfen in dem grösseren aufgeht. Nicht umgekehrt. Wieso auch?

Nun, ein kleinerer Luftballon bläst auch einen grösseren auf. Nicht umgekehrt. Hier scheint der Sachverhalt nicht ganz so selbstverständlich zu sein. Denke mal darüber nach.

2.3 Polardarstellung beim Kreis

Auf einer Kreislinie genügen die Koordinaten der Punkte dem Satz von PYTHAGORAS. Es gilt: $x^2 + y^2 = r^2$, wobei r der Radius des Kreises ist. Im Vorgriff auf die Winkelfunktionen stellen wir ausserdem fest, dass sich die $x - Koordinate$ ebensogut auch durch $x = r\cos\alpha$ und die y-Koordinate ebensogut als $y = r\sin\alpha$ schreiben lässt.

Also: Nehmen wir an, es sei ein Kreis mit dem Radius 4 gegeben. Seine $x - Koordinate$ sei $x = 1$. Wie gross muss die $y - Koordinate$ sein? Nun, es gilt $y^2 = 4 - 1 = 3$. Also gibt es für die $y - Koordinate$ *zwei* Möglichkeiten $y = \sqrt{3}$ und $y = -\sqrt{3}$.

Statt in *kartesischen* Koordinaten können die Punkte auch in *Polarkoordinaten* geschrieben werden. Als Polarkoordinaten bezeichnen wir

1. den Abstand r vom Ursprung und

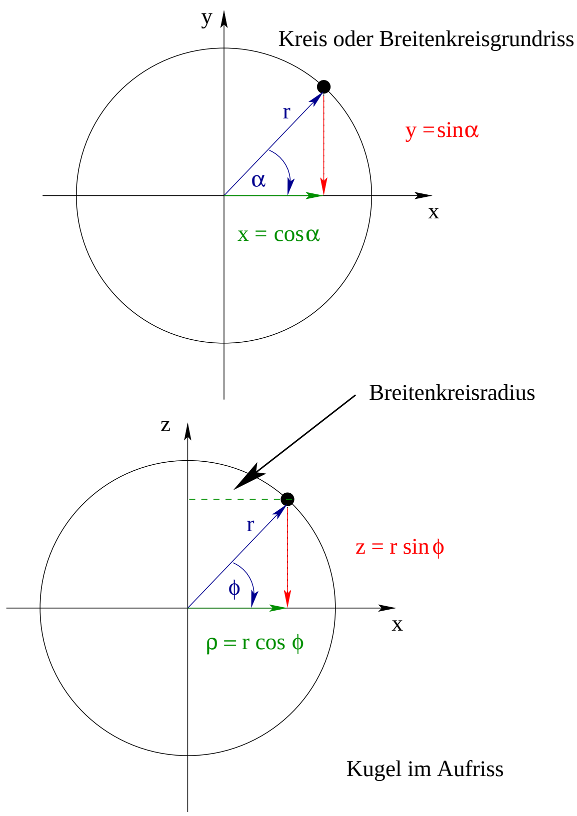

Abbildung 2: Polarkoordinaten

2. den Winkel α zwischen dem Radius und der $x - Achse$.

Gut, und wie bekommt man das alles heraus? r ist offensichtlich 3. Der Winkel α berechnet sich aus dem Verhältnis von y und x, wobei wir haben:

$$\tan\alpha = \frac{y}{x}$$

Für den ersten Punkt ergibt sich:

$$\alpha = \arctan\left(\sqrt{3}\right) \approx 60^\circ$$

und für den zweiten natürlich $\alpha = -60^\circ$.

2.4 Die Kugel in Polarkoordinaten

Bei der Kugel kommt lediglich eine Koordinate noch hinzu. Nehmen wir an, ein Kugelpunkt $P(x|y|z)$ befinde sich auf einem *Breitenkreis.* Dessen Radius ρ ist natürlich kleiner als der Radius r der Kugel. In jedem Falle gilt aber $\rho^2 = x^2+y^2$. Wie man der Abbildung ebenfalls entnimmt, ist andererseits $r^2 = \rho^2 + z^2$, also gilt

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

für alle Punkte der Kugel.

Wie sieht das Ganze jetzt in Polarkoordinaten aus? Üblicherweise wird für den Breitenwinkel die Bezeichnung ϕ gewählt. Wie Du deutlich erkennst, gilt offenbar

$$z = r \sin \phi$$

Der Radius ρ hängt ebenfalls von ϕ ab und zwar gilt $\rho = r \cos \phi$. Damit haben wir aber unser Formeltriplett zusammen. Es lautet

$$x = r \cos \phi \cos \alpha \qquad (7)$$
$$y = r \cos \phi \sin \alpha \qquad (8)$$
$$z = r \sin \phi \qquad (9)$$

Üblicherweise wird der Winkel α auch als Längenwinkel λ bezeichnet.

2.5 Kreissektor

Der Mittelpunktswinkel α eines Kreissektors verhält sich zum Vollwinkel von $360°$ genauso wie der zugehörige Kreisbogen b zum gesamten Umfang $U = 2\pi r$. Wie lang ist also im allgemeinen der Bogen b?

Nun, aus der Verhältnisgleichung

$$\frac{b}{2\pi r} = \frac{\alpha}{360°}$$

folgt sofort

$$b = \frac{\pi}{180°} \alpha r$$

Also ist b direkt proportional zu α was (Du kennst den Spruch schon) sicherlich nicht verwunderlich ist.

Für die Fläche des Kreissektors kommt etwas ganz Ähnliches heraus. Wir erhalten durch eine analoge Überlegung:

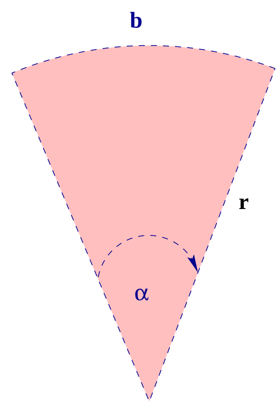

Abbildung 3: Kreissektor

$$A_{Sektor} = \frac{\pi}{360°}\alpha r^2$$

Hinter diesem wenig sensationellen Ergebnis steckt aber doch noch etwas Bemerkenswertes! Die Flächenformel enthält offenbar den Kreisbogen b! Wir erkennen, dass sich ebenso ergibt

$$A_{Sektor} = \frac{1}{2}br$$

was insofern bemerkenswert ist, weil sich damit eine vom Dreieck sehr bekannte Formel ergeben hat, sofern der Bogen als »Grundseite« und der Radius als »Höhe« begriffen wird.

2.6 Kugelabschnitt

Einen Kugelabschnitt kann man durch eine ganz analoge Überlegung ermitteln: Das Volumen des Kugelabschnittes steht im gleichen Verhältnis zum Gesamtvolumen der Kugel wie der Raumwinkel α zu 360°. Daraus folgt:

$$V_{Abschnitt} = \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{\alpha}{360°} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi\alpha}{90°} r^3$$

Die Grundfäche des Kugelabschnitts ergibt sich natürlich zu

$$A_{Abschnitt} = \frac{\alpha}{90°}\pi r^2$$

womit wir etwas sehen, was wir vielleicht schon vorher geahnt haben: es ist

$$V_{Abschnitt} = \frac{1}{3} A_{Abschnitt} r$$

was dem Kegelvolume sehr ähnlich sieht, wenn wir die »Höhe« als r und die Grundfläche als $A_{Abschnitt}$ betrachten. Kugel und Kreis sind demnach doch sehr eng miteinander verwandt ;-).

2.7 Übungsaufgaben

1. Für welchen Kreis stimmen zahlenmässig Umfang und Fläche überein?

2. Für welche Kugel stimmen zahlenmässig Oberfläche und Volumen überein?

3. Um welchen Faktor wächst das Volumen im Vergleich zur Oberfläche einer Kugel, wenn der Radius verdoppelt wird?

4. In welchem Verhältnis stehen der Durchmesser eines Wassertropfens (Dichte $\rho = 1 \frac{g}{cm^3}$) und der Durchmesser eines gleichschweren Bleitropfens (Dichte $\rho \approx 11 \frac{g}{cm^3}$) zueinander?

5. Wie tief taucht eine Korkkugel (Dichte $\rho = 0,2 \frac{g}{cm^3}$) in Wasser ein? Der Ortsfaktor für die Gewichtskraft ist $g \approx 10 \frac{N}{kg}$.

6. Bestimme Umfang und Fläche des Breitenkreises $\phi = 53°$ (Breitenkreis von Grosshansdorf).

7. Ermittle die Fläche zwischen den Breitenkreisen $\phi = 53°$ und $\phi = 43°$.

8. Welche kartesischen Koordinaten besitzt Grosshansdorf ($\phi = +53°$, $\lambda = 10°$)?

9. Ermittle den Mittelpunktswinkel eines Kreissektors von gegebenem Radius, dessen Fläche zahlenmässig genauso gross ist wie diejenige des zugehörigen Kreisbogens.